

OLIMPIADA MATEMÀTICA 2011

FASE PROVINCIAL

PROVA INDIVIDUAL

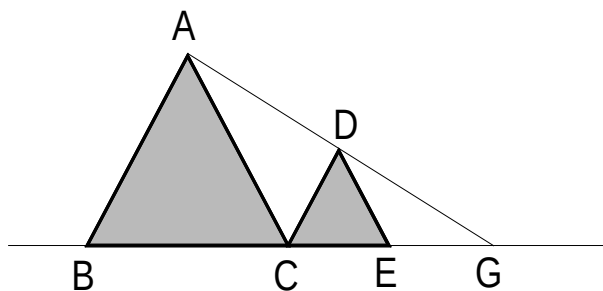
♣ CATEGORIA 14 –16 ANYS ♣

1. Siga $N = a679b$ on a i b son dígits. Si se sap que N és múltiple de 15, trobeu a i b .

2. Siguen donats els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle CDE$
equilàters de costats 1 i $\frac{1}{2}$ respectivament.

Demostreu que

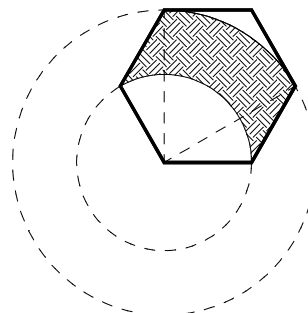
- a. $\triangle DEG$ és isòsceles
- b. $\triangle ACD$ és rectangle

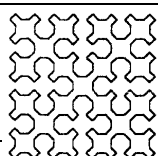


3. Trobeu 3 nombres naturals en progressió aritmètica de diferència 2 de manera que la suma dels seus quadrats siga un nombre de 4 xifres iguals.

4. Un biòleg que estudia una colònia d'aus migratòries fa les següents observacions al llarg d'un dia. A migdia se'n van 30 mascles que ja no tornen, i queden a la colònia 2 femelles per cada mascle. Per la vesprada se'n van 90 femelles, que ja no tornen, i queden a la colònia 3 mascles per cada femella. Calculeu quantes aus tenia la colònia al començament del dia.

5. Tenim un hexàgon regular de 12 cm de costat. Quina és l'àrea de la zona ombrejada?





SOLUCIONS

- 1.** $N = a679b$. Si N és múltiple de 15, com $15 = 5 \cdot 3$ tenim que N és múltiple de 5 i múltiple de 3.
Com N és múltiple de 5 acaba en 0 o en 5, per tant $b = 0$ o $b = 5$.
- a) Si $b = 0$, $N = a6790$ i com N és múltiple de 3 la suma dels dígitos és múltiple de 3, es a dir: $a + 6 + 7 + 9 + 0 = 22 + a$ és múltiple de 3. Per tant $a = 2$ (pues el menor múltiple de 3 major que 22 és 24) o $a = 5$ (pues $22 + 5 = 27$ que és múltiple de 3) o $a = 8$ (pues $22 + 8 = 30$ que és múltiple de 3). Per tant, nombres que compleixen l'enunciat son: **26790; 56790 i 86790**.
- b) Si $b = 5$, $N = a6795$ i com N és múltiple de 3 la suma dels dígitos és múltiple de 3, es a dir: $a + 6 + 7 + 9 + 5 = 27 + a$ és múltiple de 3. Per tant $a = 0$ (pues 27 és múltiple de 3) o $a = 3$ (pues $27 + 3 = 30$ és múltiple de 3) o $a = 6$ (pues $27 + 6 = 33$ és múltiple de 3) o $a = 9$ (pues $27 + 9 = 36$ és múltiple de 3). Per tant, nombres que compleixen l'enunciat son: **6795; 36795; 66795 i 96795**.

- 2.** Tenim que DE és paral·lela a AC perquè $\hat{C} = \hat{E} = 60^\circ$ al tractar-se de triangles equilàters.

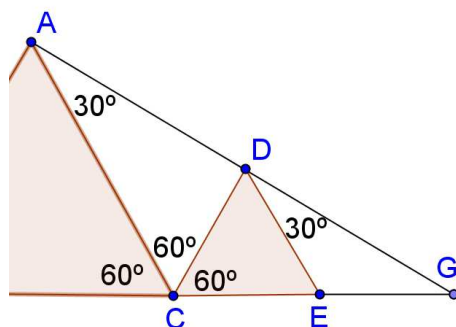
a) Per tant $\triangle ACG \approx \triangle DEG$ i d'ací:

$$\frac{EG}{CG} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{EG}{\frac{1}{2} + EG} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2EG = \frac{1}{2} + EG \Rightarrow EG = \frac{1}{2}$$

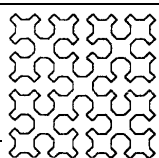
Per tant $DE = EF$ i per tant $\triangle DEF$ és isòsceles.

b) Una vegada provat a), tenim:

$$\angle EDG = \angle EGD = \frac{180 - \angle DEG}{2} = \frac{180 - (180 - 60^\circ)}{2} = 30^\circ$$



I ara $\angle CAD = 30^\circ$ al ser AC i DE paral·leles. I com $\angle ACD = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ (en $\triangle ACD$), tindrem que $\angle ADC = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ és a dir $\triangle ACD$ és rectangle



SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

3. Cal fer servir el concepte de progressió aritmètica per establir que els 3 nombres són de la forma $n-2, n, n+2$.

La suma dels quadrats dels nombres val:

$n^2 + 4 - 4n + n^2 + n^2 + 4 + 4n = 3n^2 + 8$. Com que ha de ser un nombre de 4 xifres iguals, serà de la forma $k \cdot 1111$ on $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. El nombre $k \cdot 1111 - 8$ i també $4k - 8$ és divisible per 3.

Per tant, cal buscar solucions de $4k - 8 = 3b$ o $4k - 3b = 8$. Les possibles solucions són:

$k = 2$	$b = 0$
$k = 5$	$b = 4$
$k = 8$	$b = 8$

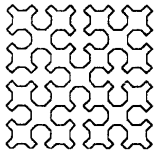
Tenint en compte que: $3n^2 + 8 = k \cdot 1111$, aleshores $\frac{k \cdot 1111 - 8}{3}$ a més a més de ser un nombre enter, ha de ser un quadrat. . Açò només es verifica per a $k = 5$ amb la qual cosa $n = 43$ i els nombres buscats són

41, 43 i 45.

4. Es tracta d'un sistema d'equacions. Anomenem x – nombre de mascles, y – nombre de femelles.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot (x - 30) = y \\ x - 30 = 3 \cdot (y - 90) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 60 = y \\ x - 30 = 3y - 270 \end{array} \right\}$$
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 60 \\ x - 3y = -240 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 84, y = 108$$

Per tant la colònia tenia 192 aus, 84 mascles i 108 femelles



5. Problema de l'hexàgon.

El costat fa 12 cm, la distància entre dos vèrtexs oposats 24. Per tant el radi de la circumferència gran serà: $\sqrt{24^2 - 12^2} = 20'7846$ cm.

Considerem aquest radi com a base del triangle, l'altura serà 3 cm. Com que hi ha dos triangles iguals, la suma de les seues àrees serà:

$$20'7846 \cdot 3 \cdot 2 = 124'7076 \text{ cm}^2.$$

L'àrea del sector circular de la circumferència gran i de 60° d'angle central serà:

$$\frac{\pi \cdot 20'7846^2}{6} = 226'1944 \text{ cm}^2$$

A aquesta figura li hem de sumar les dues zones ombrejades que hi ha als costats, per tant li podem sumar l'àrea dels dos triangles calculada abans,

$$226'1944 + 124'7076 = 350'902 \text{ cm}^2$$

Ara li hem de restar el sector circular de la circumferència de radi 12 cm i 120° d'amplitud. La seua àrea és: $\frac{\pi \cdot 12^2}{3} = 150'7964 \text{ cm}^2$.

L'àrea de la figura ombrejada serà: $350'902 - 150'7964 = 200'1055 \text{ cm}^2$.

