SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

OLIMPÍADA MATEMÀTICA 2009

FASE AUTONÒMICA

PROVA INDIVIDUAL ♣ CATEGORIA 14 –16 ANYS ♣

1. Es considera un quadrat ABCD de costat 1. Siga P un punt del costat CA tal que la distància de P a B és 1/2, d(PB) =1/2, i Q un altre punt de CA tal que la distància de Q a B, d(QB) = 1/3. Proveu que es verifica que: $\angle BAC = \angle BAP + \angle BAQ$.

2. Un grup d'alumnes no té professor, i aprofitant el moment un de tants escriu a la pissarra un número molt llarg, de 18 xifres. Quan arriba el professor de guàrdia, esborra l'última xifra de la dreta i l'escriu al començament, quedant així un número amb doble valor que el que hi havia inicialment. Quin número havia escrit l'alumne a la pissarra?.

3. Dos comerciants de vi van entrar en París amb 64 i 20 barrils de vi respectivament. Com que no tenien prou per pagar els drets de duana, el primer d'ells va entregar 5 barrils i 40 francs, mentre que el segon va donar 2 barrils, rebent 40 francs com a canvi. Quin era el preu de cada barril i el seu impost duaner?

4. En el sorteig de la Loteria Primitiva s'extrauen 6 boles de 49 números possibles, a més d'una altra bola amb el número complementari i una bola d'un altre bombo (del 0 al 9) per a determinar el reintegrament.

- Hi ha un primer premi "gros" per als encertants dels sis números de la combinació guanyadora.

I uns altres premis menors:

- cinc números + complementari,
- cinc números,
- quatre números,
- tres números,
- reintegrament (devolució de l'aposta).

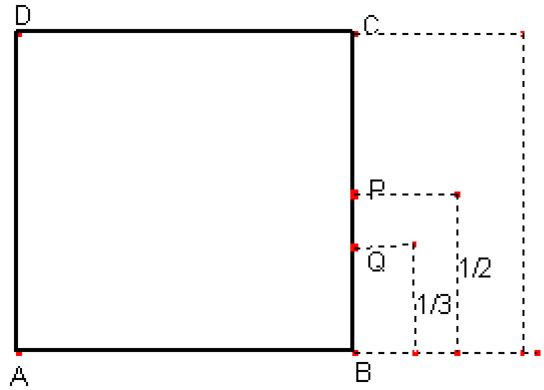
El preu de l'aposta és de 1 €. Si apostem 1 €, calculeu la probabilitat de que toque cadascun dels premis.

5. Trobeu tots els polígons regulars que verifiquen que l'angle (expressat en graus sexagesimals) entre arestes consecutives és un nombre natural.

Solucions

Problema 1

Per aquest problema proporcionarem 4 possibles solucions

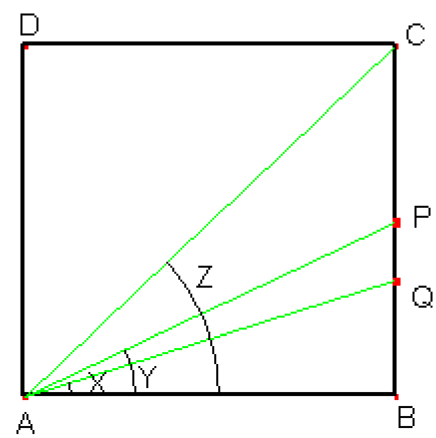


Solució 1: Dibuix amb regla i compàs, comprovant la suma d'angles amb el compàs

Solució 2: Utilitzant raons trigonomètriques, per exemple la tangent i calculadora:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tag}X = \dfrac{1}{3} \Rightarrow X = \text{arctag}\dfrac{1}{3} \Rightarrow X = 18^{\circ}\,26'5{,}82'' \\ \text{tag}Y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow Y = \text{arctag}\dfrac{1}{2} \Rightarrow Y = 26^{\circ}\,33'54{,}18'' \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y = 45^{\circ}$$

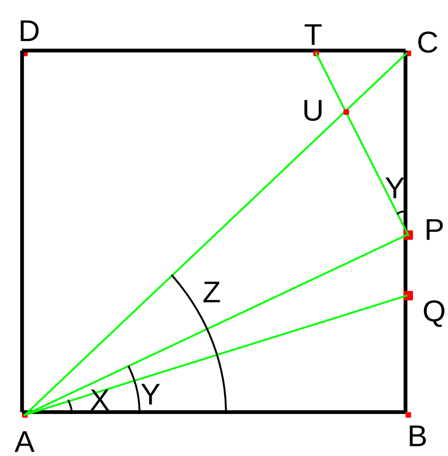
$$\text{tag}Z = 1 \Rightarrow Z = \text{arctag}1 \Rightarrow Z = 45^{\circ}$$



Solució 3: Utilitzant raons trigonomètriques, per exemple la tangent i fórmules de l'angle suma:

$$\text{tag}(X+Y) = \frac{\text{tag}X + \text{tag}Y}{1 - \text{tag}X \cdot \text{tag}Y} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 = \text{tag}Z \Rightarrow X + Y = Z$$

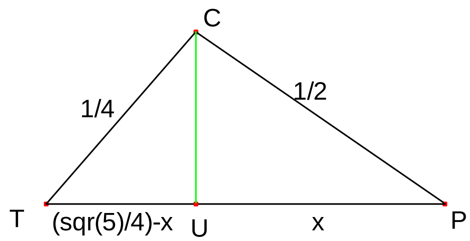
Solució 4: Tracem per P una perpendicular a AP. Aleshores tenim que $Y = \angle BAP$ per tenir els angles els costats perpendiculars. Com a més a més $\angle ABP = \angle PCT = 90^{o}$, tindrem que els triangles de vèrtexs ABP i PCT són congruents: $\Delta ABP \approx \Delta PCT$.



D'ací s'obté que: $\dfrac{AB}{PC} = \dfrac{BP}{TC} \Rightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{TC} \Rightarrow TC = \dfrac{1}{4}$

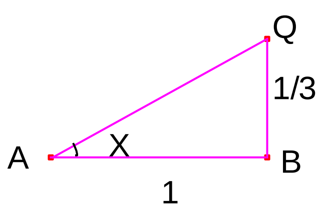
I per Pitàgores: $PT = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$

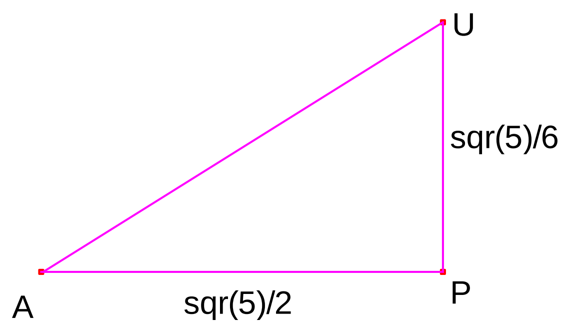
Ara pel teorema de la bisectriu (o també el de l'altura al ser el triangle rectangle):



$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{4}-x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

Per tant tenim que $\Delta APU \approx \Delta AQB$, doncs hi ha un angle igual (90º) i els costats consecutius proporcionals:





I així $\angle PAU = X$, amb la qual cosa Z = X+Y

Problema 2

Número inicial (I), Número final (F)

1. L’última xifra de (I) és la primera de (F).
2. Excepte l’última, totes les xifres de (I) estan desplaçades un lloc cap a l’esquerra en (F).
3. El valor del número (F) és doble que el del número (I).
4. Podem anar multiplicant les xifres de (I) per 2 de dreta a esquerra per tal d’obtindre les xifres de (F).

   Exemple: Suposem que l’última xifra de (I) siga un 4. Els primers passos serien:

3	6	8	4
		x	2
	3	6	8

   El procés acabarà si obtenim un 4 a la fila de baix que tinga un 2 a la de dalt:

2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
																x	2
4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8

5. Veiem que:
   a) per a les xifres 0 i 1 no pot tindre solució
   b) per a les xifres, 2 , 3 , 6 , 9 entrem en bucles repetitius sense eixida.
6. Obtenim solució per a les xifres 4 , 5 , 7 i 8.

   $105263157894736842 \cdot 2 = 210526315789473684$

   210526315789473684 · 2 = 421052631578947368
   263157894736842105 · 2 = 526315789473684210
   368421052631578947 · 2 = 736842105263157894
   421052631578947368 · 2 = 842105263157894736

7. Podem observar una repetició cíclica de les xifres en totes les solucions.
8. Donat que l’enunciat pareix indicar l’existència d’un únic número, s’hauria de donar per bona l’obtenció d’alguna de les anteriors solucions

Problema 3

Es tracta de plantejar i resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites.

Anomenem x: preu del barril i y: impost duaner. Aleshores:

$\begin{cases} 5x + 40 = 64xy \\ 2x - 40 = 20xy \end{cases}$. Aïllarem x i resoldrem pel mètode d'igualació.

De la primera equació: $5x - 64xy = -40 \to x = \dfrac{-40}{5 - 64y}$. De la segona equació i amb el mateix procediment, $2x - 20xy = 40 \to x = \dfrac{40}{2 - 20y}$. Per tant $\dfrac{-40}{5 - 64y} = \dfrac{40}{2 - 20y}$ i multiplicant en creu, $-2 + 20y = 5 - 64y \to 84y = 7 \to y = \dfrac{7}{84} = \dfrac{1}{12}$. Substituint en una de les dues expressions que ens dóna el valor de x, tenim que: $x = 120$.

Per tant el preu de cada barril és de 120 francs i el impost duaner és de 1/12 francs.

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

Problema 4

Juguem 1 €, és a dir, fem una aposta.

Omplim 6 caselles de les 49 inicialment possibles.

1. Probabilitat d'encertar els sis números:

$$p_1 = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44} = 0'00000007151$$

2. Probabilitat d'encertar 5 números i fallar-ne un. El número que fallem pot estar en qualsevol de les 6 posicions:

$$p_2 = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{43}{44}\cdot 6 = \frac{1}{54200'83} = 0'00001844$$

3. Probabilitat d'encertar 5 números + el complementari. És la calculada en l'apartat anterior però ara encertem també el complementari:

$$p_3 = p_2\cdot\frac{1}{43} = \frac{1}{2330635'69} = 0'000000429$$

4. Probabilitat d'encertar 4 números i fallar-ne dos, aquests poden estar en qualsevol de les 15 posicions possibles:

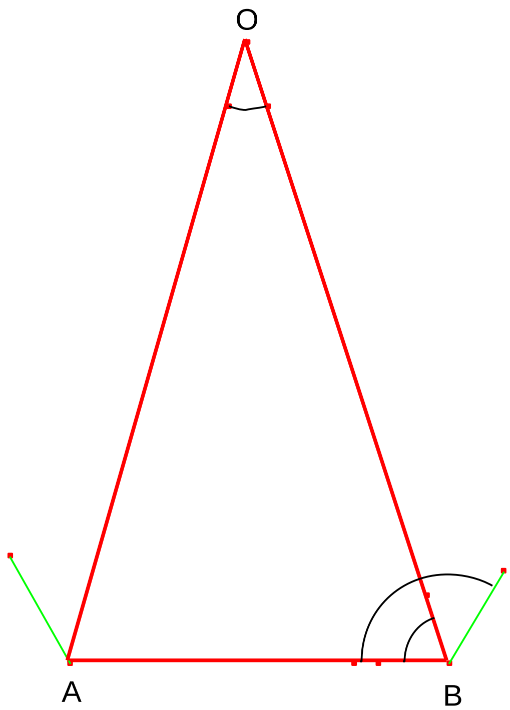
$$p_4 = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{43}{45}\cdot\frac{42}{44}\cdot C_{6,2} = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{43}{45}\cdot\frac{42}{44}\cdot 15 = \frac{1}{1032'39} = 0'00096$$

5. Probabilitat d'encertar 3 números i fallar-ne 3, aquests poden estar en qualsevol de les 20 posicions possibles:

$$p_5 = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{43}{46}\cdot\frac{42}{45}\cdot\frac{41}{44}\cdot 20 = \frac{1}{56'6559} = 0'01765$$

6. Reintegrament: $p_6 = \frac{1}{10} = 0'1$

Problema 5



Siga n el nombre de costats, AB una aresta i O el centre de la circumferència circumscrita. Aleshores: $\hat{O} = \frac{360}{n}$

I com OA = OB el triangle és isòsceles. Per tant:

$$\hat{A} = \hat{B} = \alpha$$

I l'angle entre arestes consecutives es 2α. Com la suma dels angles d'un triangle es180º

$$2\alpha = \frac{180(n-2)}{n}$$

Per tant n és un divisor de 180 major que 2. Com 180 = $3^2 \cdot 2^2 \cdot 5$ els valors de n son:

n	3	5	2^2	3^2	$2\cdot3$	$2^2\cdot3$	$2\cdot3^2$	$2^2\cdot3^2$	$2\cdot3\cdot5$	$2^2\cdot3\cdot5$	$2^2\cdot3^2\cdot5$	$2\cdot3^2\cdot5$	$3\cdot5$	$3^2\cdot5$	$2\cdot5$	$2^2\cdot5$
	3	5	4	9	6	12	18	36	30	60	180	90	15	45	10	20
2α	60	108	90	140	120	150	160	170	168	174	178	176	156	172	144	162