SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

OLIMPÍADA MATEMÀTICA 2007

FASE PROVINCIAL

PROVA INDIVIDUAL

♣ CATEGORIA 14 –16 ANYS ♣

1. Considerem la successió definida per $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + a_n^2$

a. Escriu els 10 primers termes de la successió
b. Determina les dues últimes xifres de a_{2000}

Per tal d'escriure els 10 primers termes de la successió, és suficient amb donar valors a n tenint en compte la recurrència exposada en l'enunciat

$$\begin{aligned}
&a_1 = 3\\
&a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 9 = 12\\
&a_3 = a_2 + a_2^2 = a_2(1 + a_2) = 12 \cdot 13 = 156\\
&a_4 = a_3 + a_3^2 = a_3(1 + a_3) = 156 \cdot 157 = 24492\\
&a_5 = a_4 + a_4^2 = \cdots = 24492 \cdot 24493 = \cdots\cdots 56\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Suposem que a_n acaba en 56. Aleshores, $a_n = 100a + 56$ i per tant:

$$a_{n+1} = (100a + 56)\cdot(100a + 57) = 100b + 56 \cdot 57 = 100b + 100c + 92 = 100d + 92,$$

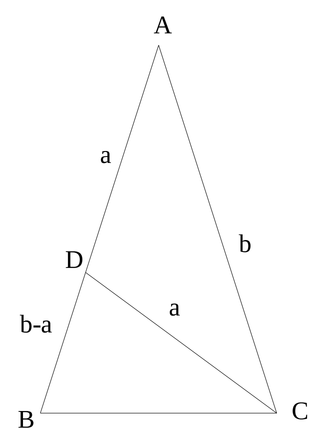
és a dir, les últimes xifres de a_{n+1} són 92. Anàlogament, si a_n acaba en 92, es pot provar que a_{n+1} acaba en 56.

Com que 2000 és parell, aleshores a_{2000} acaba en 92

2. L'angle A, oposat del costat desigual, d'un triangle isòsceles ABC mesura les dues cinquenes parts d'un recte. La bisectriu de l'angle C talla al costat oposat en el punt D. Es demana:

a. Un dibuix que represente el problema
b. Les mesures dels angles del triangle BCD
c. Expressar la mesura, *a*, del costat BC en funció de la mesura *b* del costat AC

a)



b) Amb les dades de l'enunciat tenim:

al triangle ABC $\angle$ BAC = 36º; $\angle$ ABC = $\angle$ ACB = 72º
al triangle CBD $\angle$ BCD = 36º; $\angle$ CDB = $\angle$ BDC = 72º
al triangle ADC $\angle$ DAC = $\angle$ ACD = 72º; $\angle$ ADC = 108º

Per tant els triangles BCD i ADC són isòsceles i a més a més el triangle BCD és semblant al triangle ABC.
Pel que fa als costats, tenim: DC = AD = a; BD = b - a.

c) Expressant la proporcionalitat que se'n deriva de la semblança anterior:

$$\frac{b-a}{a}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a^2=b^2-ab\Leftrightarrow a^2+ab-b^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-1=0$$

i resolent queda $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)b}{2}$ és a dir, és la secció àuria de b

3. Proveu que cap dels números 1573, 15731573, 157315731573, etc és un número primer

En primer lloc comprovem que 1573 no és número primer: $1573 = 143 \cdot 11$
A continuació hem de provar que els següents termes de la successió així formada tampoc ho són:

$1573171573 = 1573 \cdot 10^4 + 1573 = 1573 \cdot 10001$

$157315731573 = 1573 \cdot (10^8 + 10^4 + 1) = 1573 \cdot 100010001$

Tots els números d'aquesta successió seran per tant múltiples de 11 i per tant números no primers.

4. Es venen 140 kg de taronges. D'una part es guanya el 30 % i de la resta es perd el 20 %. Si al final ni es guanya ni es perd, quants kg hem venut amb guanys?

Siga x els kg de taronges amb els quals guanyem diners, un 30 %.
Siga 140 – x els kg de taronges amb els quals perdem diners, un 20 %

Els guanys i la pèrdua han de ser iguals:

$$0'3 \cdot x = 0'2 \cdot (140 - x)$$
$$0'3 \cdot x = 28 - 0'2 \cdot x$$
$$0'5 \cdot x = 28$$
$$x = 56$$

5. Troba tots els nombres naturals x i y que verifiquen les següents relacions:

$$x + y \le 50$$

$$\frac{x + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + y} = 15$$

Operant amb l'equació i posteriorment simplificant s'obté:

$$\frac{x + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + y} = 15 \Rightarrow \frac{\frac{xy+1}{y}}{\frac{1+yx}{x}} = 15 \Rightarrow \frac{x(xy+1)}{y(1+yx)} = 15 \Rightarrow \frac{x}{y} = 15 \Rightarrow x = 15y$$

Per tant, busquem nombres naturals que verifiquen:

$$x + y \le 50$$

$$x = 15y$$

Així doncs, anem a provar parells de nombres:

y	$x = 15y$	¿ $x + y \le 50$?	
1	15	16	SI
2	30	32	SI
3	45	48	SI
4	60	64	NO