IES MIGUEL HERNANDEZ
BIGASTRO

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE PRIMITIVAS

¿Qué es la primitiva de una función?

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Esto se expresa así: $\int f(x)dx = F(x)$.
A $\int f(x)dx$ se le llama también integral indefinida de $f(x)$.

Propiedades:

a) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
b) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Integral de una potencia:

a) $\int 1dx = x + k$ b) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \neq -1)$ c) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + k$

Integral de un cociente:

$\int \dfrac{p(x)}{q(x)}dx = \int \left[c(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \right] dx$, donde $c(x)$ cociente y $r(x)$ resto.

Integral trigonométrica:

a) $\int senx\,dx = -\cos x + k$ b) $\int \cos x dx = senx + k$ c) $\int (1 + tg^2 x) dx = tgx + k$

d) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + k$ e) $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = arctgx + k$

Integrales exponenciales:

a) $\int e^x dx = e^x + k$ b) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$

Método de sustitución:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

donde hacemos el cambio de variable $t = g(x)$, $dt = g'(x)$

Integración por partes: (Cuando tenemos el producto de funciones de diferente tipo)

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

Se representa $\int_a^b f(x)dx$ y nos servirá para calcular áreas. Se resuelve de la siguiente manera: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$.

Cálculo del área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[a,b]$.

Primer paso: Resolvemos la ecuación $f(x) = 0$, obteniendo las soluciones $x_0, x_1, \ldots x_n$

Segundo paso: Calculamos las integrales definidas $\int_a^{x_0} f$, $\int_{x_0}^{x_1} f$, $\int_{x_1}^{x_2} f$,......., $\int_{x_n}^{b} f$

Tercer paso: Sumamos todos los resultados obtenidos "en positivo".

Cálculo del área encerrada entre la gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en $[a,b]$.

Consideramos la función $f(x) - g(x)$ y procedemos como en el caso anterior.

IES MIGUEL HERNANDEZ
BIGASTRO

EJERCICIOS

1.1.- Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{7}{2x-4}dx$ b) $\int \frac{3x+1}{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{4x+5}{1-x^2}dx$ d) $\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}dx$

e) $\int \frac{5x+2}{x^2-4}dx$ f) $\int \frac{5}{4+x^2}dx$ g) $\int \frac{3x+1}{16+x^2}dx$ h) $\int \frac{2x^3+x^2+15x}{9+x^2}dx$

i) $\int \frac{x^2+x-4}{(1+x^2)(x-1)}dx$ j) $\int \frac{3x^2+3x-1}{(1+x^2)(x+2)}dx$ k) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}dx$

l) $\int \frac{3x+2}{x^2+5x+6}dx$ m) $\int \frac{x^4+x^3+4x^2-x+1}{(1+x^2)(x-1)}dx$ ñ) $\int \frac{4x^2-3}{(2x+1)(3x-1)}dx$

1.2.- Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx$ b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ c) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$ d) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

e) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-(2^x)^2}}dx$ f) $\int \frac{8x+2}{2x^2+x}dx$ g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$ h) $\int \frac{x.arcsenx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

i) $\int tgx\,dx$ j) $\int sen^3x\cdot\cos x\,dx$ k) $\int \frac{senx}{1+\cos^2 x}dx$ l) $\int sen^3x\,dx$

m) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$ n) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$ ñ) $\int \frac{7}{x\cdot\ln(4x)}dx$ o) $\int \frac{1}{senx\cdot\cos x}dx$

p) $\int x\cdot\sqrt{1+x}\,dx$ q) $\int \frac{sen(\ln x)}{x}dx$ r) $\int \frac{7}{x\cdot(1+\ln^2 x)}dx$ s) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}$

1.3.- Calcula las siguientes primitivas integrando por pates:

a) $\int x\cdot e^x\,dx$ b) $\int x\cdot\ln x\,dx$ c) $\int x\cdot 2^x\,dx$ d) $\int x\cdot arctgx\,dx$

e) $\int \frac{x}{3^x}\,dx$ f) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ g) $\int \sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$ h) $\int x^3\cdot(\ln x)^2\,dx$

i) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ j) $\int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx$ k) $\int x \cdot senx \, dx$ l) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$

m) $\int \ln x \, dx$ n) $\int (\ln x)^2 \, dx$ ñ) $\int arctgx \, dx$ o) $\int 5x^2 \cdot senx \, dx$

p) $\int e^x \cdot senx \, dx$ q) $\int x^2 \cdot arctgx \, dx$ r) $\int e^{2x} \cdot \cos x \, dx$

2.- Halla el área de la región del plano delimitada por las curvas $y = x^2 + x - 2$, $y = 2x$

3.- De una función $y = f(x),\ x > -1$, sabemos que tiene por derivada: $y' = \dfrac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Halla la función sabiendo que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$

4.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, determina a, b, c para que se cumpla que la función tenga un mínimo en el punto (2,-3) y que: $\int_0^2 f(x)dx = -2$

5.- Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por: el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva $y = \dfrac{1}{4 + x^2}$.
a) Calcular razonadamente el área de la región R.
b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A(izquierda) y B(derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B.

6.- Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje X y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

7.- Dada la función real $f(x) = e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente la integral $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, siendo a un número real positivo. Luego, halla el punto de inflexión de f(x).

8.- Dadas las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x-2)(9 + x^2)$, se pide:
a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
b) La función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$.

9.- Dadas las curvas $y = (x-1)^3$, $y = 5 - x^2$, calcular razonadamente:
a) Su punto de corte. b) El área encerrada por ellas y el eje OY.

10.- Dada la función $f(t) = at + b$ (a y b constantes reales),

si $F(x) = x \cdot \int_1^{x+1} f(t)dt$, se pide:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)dt$.

b) La expresión de la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$.

c) La relación entre a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$.

11.- Para cada número real positivo α, se considera la función $f(x) = x^2 + \alpha$. Se pide:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y $f(x)$.

b) El valor de α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices (0,0), $(\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6},6+\alpha)$, $(0,6+\alpha)$ en dos regiones de igual área.

12.- En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X. Entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros. ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60€?

13.- Halla los valores de a tales que $\int_0^a \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \ln 25$.

14.- Halla el valor de a para que $\int_0^{a-1} (x+1)dx = \frac{9}{2}$. Obtener, razonadamente, la integral que da el área de la superficie entre el eje X, la curva $y = x + 1$ y las rectas $x = 0, x = 2$.

15.- Se desea construir una bodega de forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 4/3 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, $225\,€/m^2$, $300\,€/m^2$ y $256\,€/m^2$. Determinar el valor x de la anchura de la base que minimiza el coste y calcula dicho coste.

16.- Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300€ la unidad. El comerciante lo venderá al público a un precio de 420€. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 € de descuento en el precio de en la conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, el número de unidades que debe pedir al proveedor para vender en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad para maximizar sus beneficios.

17.- Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0’2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina si la base medía 8 cm. y la altura 6 cm.

18.- A las 7 de la mañana, una lancha A está situada a 150 km al este de otra lancha B. la lancha A navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h. y la lancha B se dirige hacia el norte a 30 km/h. ¿A qué hora estarán las lanchas a distancia mínima?

19.- En un terreno con forma de semicírculo de radio 20 metros,
se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:
El área del rectángulo en función de x y el valor de x que maximiza dicha área.

20.- El borde de un estanque está formado por el arco de la curva $y = 4 - x^2$ de extremos (-2,0) y (2,0) y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas (0,2). Se pide:
a) Halla el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque más próximo al surtidor
b) Halla los puntos del arco de curva del borde del estanque más próximos al surtidor.

21.- Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a una velocidad constante de 1,8 metros/minuto.
a) Obtener el área quemada en función del tiempo, t.
b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcance 45 metros.

22.- El coste del marco de una ventana rectangular es el doble por metro vertical que por metro horizontal. Calcular las dimensiones que debe tener el marcote una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible, y calcula dicho coste.

23.- La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es
$C(t) = 0'29483t + 0'04253t^2 - 0'00035t^3$ mg/ml, donde t son los minutos transcurridos.
a) Calcula el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa.
b) Determina en qué instante la concentración del fármaco es máxima.

24.- Encontrar el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente.

25.- Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya a 3 km. de la orilla y dista $3\sqrt{5}$ km. del punto N. Si recorriendo la orilla, su velocidad media es de 5 km/h y nadando, de 3 km/h, ¿cuánto tiempo deberá caminar y cuando nadar para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?

26.- Obtener, razonadamente, el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 4$ y el eje X. Posteriormente, halla el volumen del cuerpo generado al dar un giro completo alrededor del eje X la superficie del apartado anterior.

27.- Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Halla a, b y c para que la función presente un punto de inflexión en x=-1 y un mínimo en el punto (1,5).

28.- Calcula la derivada de la función $f(x) = \int_0^{x^2} \cos(t)\cdot t\, dt$

29.- Determina los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a mínima distancia de P(0,1).