

1.- Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{(-2)^4 \cdot 18^{-3} \cdot 10^2}{15^{-3} \cdot 6^{-2}}$ b) $\frac{(-3)^3 \cdot 4^{-2} \cdot 12^{-3}}{5^2 \cdot 10^{-3}}$ c) $\frac{(-4)^{-2} \cdot 14^{-3} \cdot 7^2}{24^2 \cdot 21^{-3}}$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^2}}$ g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$ h) $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$

i) $\frac{\sqrt[4]{2^2 5^3} \cdot 2}{\sqrt[6]{10}}$ j) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[4]{200}}}{\sqrt{81}}$ k) $\frac{\sqrt[3]{a^4 b^3} \cdot \sqrt[3]{a^7 c}}{\sqrt[6]{c^7 b}}$ l) $\left[\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{(x^2 y)^2}}\right)^3\right]^2$

2.- Ordena los siguientes números: a) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ y $\sqrt[5]{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}$ y $\sqrt{2\sqrt[3]{10\sqrt{5}}}$.

3.- Extrae factores de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{x^7 \cdot y^{11} \cdot z}$ c) $\sqrt[5]{\frac{x^2 \cdot y^{19} \cdot z}{z^{13} \cdot x^{24}}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{128x^{11}}{81y^6 z^9}}$

e) $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^8}}$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{a^{19} \cdot b^7}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{(16x^3)^2}{2\sqrt[7]{y^7 z^{15}}}}$ h*) $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}$

4.- Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\sqrt[4]{x^6} \cdot \sqrt[4]{x^{15}}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{10} \cdot b^{19}}}}$ c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{256}}$ d*) $\sqrt{4x^2 + 4}$

e) $\sqrt{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{81}} \cdot \sqrt[4]{64}$ f) $\sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[3]{32}}$ g) $\left(\frac{\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{5}}}{4\sqrt{2}}\right) : \left(2\sqrt[3]{16}\right)$

h) $\left(\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^5}\right) : \sqrt{a}$ i) $\frac{\sqrt[3]{a^4 \cdot b^2} \cdot a \cdot \sqrt{a^8}}{a^{-3} \cdot \sqrt[3]{a \cdot b^{15}}}$ j) $a \cdot \sqrt[4]{\frac{a^{11} \cdot b^8}{z^{13}}} \cdot \frac{a^{-3} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[6]{b^{21} \cdot a^7}}$

k) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^{17} \cdot b}}\right)^5 : \sqrt[4]{\frac{a \cdot y^9}{b^9}}$ l) $\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^{-13}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ m) $\sqrt{\frac{x^9}{y^5} \cdot \sqrt[3]{x^{-2}} \cdot \sqrt{y}} : \frac{x}{\sqrt{y}}$

5.- Agrupa las siguientes raíces cuando sea posible.

a) $3\sqrt{7} + \sqrt{7} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ b) $3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8x}$ c) $\frac{-\sqrt{6}}{5} + 2\sqrt{24}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} - 3\sqrt[6]{128}$

e) $\sqrt[3]{\frac{81}{8}} + \frac{\sqrt[3]{24}}{2} - \sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt{90} - 3\sqrt{40} + \frac{1}{5}\sqrt{10}$ g) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 3\sqrt{\frac{18}{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{32}{45}}$

6.- Racionaliza y simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{12}{\sqrt[3]{3^2}}$ c) $\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-4}$ e) $\frac{\sqrt{20}}{2\sqrt{5}-7\sqrt{7}}$

f) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ g) $\frac{3\sqrt{5}-7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ h) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{4\sqrt{12}-2\sqrt{6}}$ i*) $\frac{3}{1+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

7.- Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2$ c) $(3\sqrt{2}-7\sqrt{10})^2$ d) $(3-\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{14}$

8.- Racionaliza y opera:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}-1} + \frac{7}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ c) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

9.- De las siguientes igualdades, di las que son verdaderas y las que son falsas:

a) $\sqrt{a^2-b^2} = a-b$ b) $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b}$ d) $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$

10.- Halla la base de los siguientes logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x 16 = -4$ c) $\log_x 0'01 = 2$ d) $\log_x 3 = -2$ e) $\log_x 9 = \frac{-1}{2}$

11.- Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 125$ b) $\log_2 0'5$ c) $\log_2 0'125$ d) $\log_4 \sqrt[3]{16}$ e) $\log_5 0'2$

f) $\log_6 \frac{\sqrt[5]{6^2}}{36}$ g) $\log_{\sqrt{3}} 81$ h) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$ i) $\ln \frac{1}{e}$ j) $\log_5 0'2 \sqrt[5]{5^4}$

12.- Demuestra que $3 = -\log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \right)$

13.- Si a y b son dos números positivos y distintos de uno, calcula $\log_a (1/a) + \log_{1/b} b$.

14.- Si $\log a = \log b + \log 5$, ¿qué relación existe entre a y b?

15.- Si $\log_3 a = k$, expresa en función de k los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 (a/9)$ b) $\log_3 27a^5$ c) $\log_3 \frac{\sqrt[5]{9}}{a^3}$ d) $\log_3 \sqrt[7]{\frac{a^2}{3}}$ e) $\log_9 a$

16.- Calcula a y b , sabiendo que $\log_a b = 2$ y $\log_a 8b = 5$.

17.- Sea a un número positivo y distinto de uno. Calcula: $\frac{\log a - \log \frac{1}{a} + \log \sqrt[3]{a}}{\log a^5}$

18.- Sabiendo que $\log 2 = 0'301$ y que $\log 7 = 0'845$, calcula:

- a) $\log 49$ b) $\log 14$ c) $\log \frac{49}{2}$ d) $\log 1'75$ e) $\log \sqrt{3'5}$ f) $\log 5$
g) $\log \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$ h) $\log 0'2$ i) $\log \sqrt[3]{28}$ j) $\log 2 \cdot \log 7$ k) $\log_3 \sqrt{\frac{14}{5 \cdot \sqrt{2}}}$

19.- Halla el valor de x utilizando las propiedades de los logaritmos:

- a) $\log x + \log 4 = \log 5$ b) $\log x - \log 15 = \log 2$ c) $\log 2x = 3 \cdot \log 7$
d) $\log 7x = \log 6 - \log 2 - 2 \cdot \log 5$ e) $\ln(5 - x) = \ln 12 - \ln(2x)$ f) $\log_{x^2} 2x = 1$
g) $\log(x + 1) + \log(x + 4) = 1$ h) $\log x = 4 \log 2 - \frac{\log 49}{2}$ i) $\log_3(x^4) = 2$
j) $\ln(8x + 12) - \ln 2x = 2 \cdot \ln 3$ k) $2 \log(x - 1) = \log(x + 5)$ l) $5 \cdot \log x + \log x = 4$
m) $\ln x + \frac{1}{3} \ln 8 + 2 \ln(x - 2) = \ln(x^2 - 2x)$ n) $\log_8(25 - x^3) - \log_2(4 - x) = 0$
ñ) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$ o) $\log(3x + 1) - \log(2x - 3) = 1 - \log 5$

20.- Halla el valor de x para que se cumplan las siguientes igualdades:

- a) $3^x = 9^7$ b) $2^{x^2-9} = 1$ c) $3^x = 0'5$ d) $0'4^x = 15$ e) $2^{3x+1} + 1 = 61$
f) $3^{\frac{x}{2}+1} = 5$ g) $5 \cdot 2^{7x-1} - 1 = 17$ h) $\log(3x - 5) = -1$ i) $\ln 2x = 10$

Escala de Richter: $M = \log P$, donde P es la potencia del terremoto y M la magnitud.

21.- El terremoto de Lisboa de 1755 tuvo una magnitud de 9 grados en la escala Richter, y el terremoto de Montesinos del 2008, 4 grados. ¿Cuántas veces más fuerte fue el terremoto de San Francisco que el de Montesinos?

División celular

22.- Una célula se divide en otras dos idénticas cada hora.

- a) Si hay tres células en un principio, ¿cuántas habrá al cabo de 22 horas?
b) Si al cabo de 10 horas hay 5120, ¿cuántas había en un principio?
c) ¿Cuánto tiempo necesitamos para tener 5000 si había en un principio 6 células?

Datación por carbono 14. La cantidad de carbono que contiene un ser vivo es constante, llámese q^* . Cuando muere, deja de intercambiar carbono con el entorno, y el que contiene se va perdiendo. El carbono-14 es radioactivo, siendo su “**periodo**” de 5730 años (es decir, a los 5730 años de la muerte, la cantidad de C-14 en sus restos fósiles se reduce a la mitad, a los 11.460 años a la cuarta parte, a los 17190 a la octava parte...). Si q es la cantidad de carbono-14 en el momento del experimento y se cumple:

$$\left(\frac{q}{q^*}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}, \text{ con lo que, la edad del objeto es: } t = -5730 \cdot \log_2\left(\frac{q}{q^*}\right) = -5730 \cdot \frac{\log\left(\frac{q}{q^*}\right)}{\log 2}$$

Nota: $\frac{q}{q^*}$ será la proporción de carbono que queda respecto la que había en un principio.

23.- Si los restos de la Sábana Santa de Turín contienen un 90% del carbono-14 que se encuentra en una sábana actual, ¿cuánto tiempo tiene dicha sábana?

24.- ¿Cuánto quedará, en el año 2010, de 1 gr. de carbono 14 del año 15000 a.C?

25.- ¿Qué cantidad de carbono 14 había hace 20000 años si hoy hay 2 grs.?

Problemas de finanzas.

26.- Si invertimos 5.000€ a un 3% anual, ¿qué cantidad recogeremos al cabo de 6 años?

27.- Ingresamos en un banco 2.000€, transformándose en 2.500€ al cabo de 3 años. ¿Cuál es el interés compuesto que me aplican?

28.- Halla el tiempo necesario para duplicarse un capital, a un interés compuesto del 5%. Usa la fórmula: $Capital \text{ fin año } n = Capital \text{ inicial} \cdot \left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$.

Hora del fallecimiento de un cadáver. La temperatura de una persona viva es de 36'5°C. A partir del momento de la muerte la temperatura del cadáver se va aproximando a la temperatura ambiente (un recinto sin cambios de temperatura) según las fórmulas:

$$\frac{T_1 - T}{T_2 - T} = e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{T_1 - T}{T_2 - T}\right), \text{ de donde obtenemos } k \text{ para seguir con:}$$

$$\frac{T_1 - T}{T_0 - T} = e^{kt} \Rightarrow t = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{T_1 - T}{T_0 - T}\right).$$

T_0 = Temperatura inicial del cuerpo humano (36'5°C)

T_1 = Temperatura a la que se encuentra el cadáver.

T_2 = Temperatura a la que se encuentra el cadáver a las 2 horas.

T = Temperatura ambiente.

t = Horas transcurridas desde el fallecimiento (saldrá un número negativo)

29.- Supongamos el siguiente caso ficticio: Encontramos un cadáver a las 10 a.m. y está a una temperatura de 32°C. A las 12 a.m. su temperatura es de 27°C. Si se encuentra el cadáver en una habitación con temperatura constante de 18°C, ¿A que hora murió?